# 10. ESPACIOS VECTORIALES GENERALES

Muchos objetos matemáticos tienen propiedades algebraicas muy similares a $\mathbb{R}^n$ y para esos objetos se podrán deducir propiedades análogas. El concepto de espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ se generaliza para contener a tales objetos, en la siguiente forma:

## 10.1. ESPACIO VECTORIAL SOBRE UN CUERPO $\mathbb{K}$

Un **espacio vectorial sobre el cuerpo** $\mathbb{K}$ es un conjunto $V$ no vacío, cuyos elementos reciben el nombre de **vectores**, y sobre el que hay definidas dos operaciones:

1. Una suma, tal que si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$
2. Un producto por escalares, tal que si $\boldsymbol{x} \in V \; y \; \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} \in V$

Con las siguientes propiedades sobre la suma:

3. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$
4. Si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V \Rightarrow (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$
5. Existe en $V$ un elemento, que se nota por $\mathbf{0}$, que verifica que si $\boldsymbol{x} \in V \Rightarrow \boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$
6. Para todo elemento $\boldsymbol{x} \in V$ existe un elemento que se nota por $-\boldsymbol{x} \in V$, tal que

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$$

Y las siguientes propiedades que involucran producto por escalares:

7. si $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \; y \; \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}$
8. si $\boldsymbol{x} \in V \; y \; \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow (\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{x}$
9. si $\boldsymbol{x} \in V \; y \; \alpha, \beta \in \mathbb{K} \Rightarrow (\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \alpha(\beta \boldsymbol{x})$
10. si $\boldsymbol{x} \in V \Rightarrow 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

Las definiciones de dependencia e independencia lineal, base, dimensión, coordenadas etc en un espacio vectorial $V$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, es una extensión natural a las definiciones dadas para el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, por ejemplo:

### 10.1.1. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

Sea $V$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\} \subset V$ un conjunto de vectores de $V$. Si para todo $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{K}$, que verifiquen la relación $x_1\boldsymbol{u_1} + x_2\boldsymbol{u_2} + \cdots + x_m\boldsymbol{u_m} = \mathbf{0}$ se cumple que es $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$, entonces el conjunto $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$ es **linealmente independiente**; en caso contrario se dice que $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\} \subset V$ es **linealmente dependiente**.